

Name, Vorname:

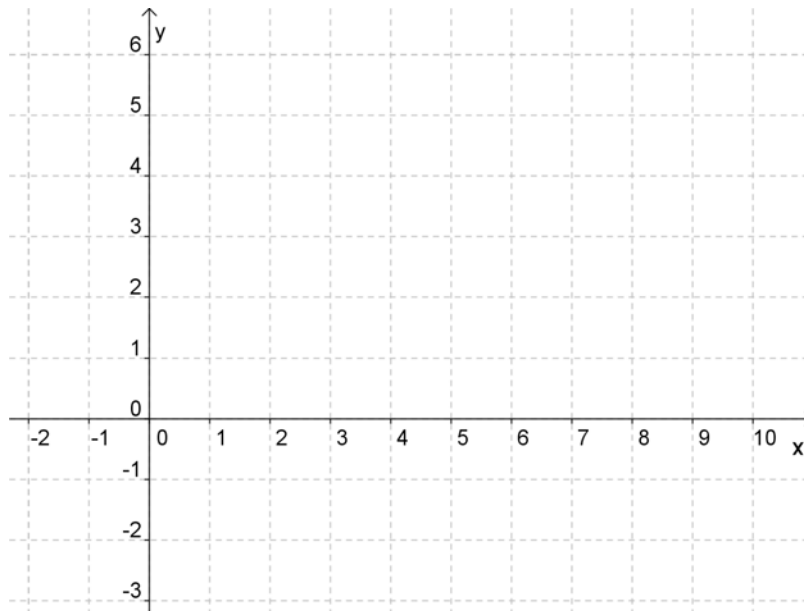
Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1–3 des Arbeitsblattes)**Arbeitsblatt**

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

1 Analysis

1.1 Skizzieren Sie den Graph einer Funktion f , wobei die folgenden Eigenschaften deutlich werden sollen:

$$f(3) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 ; \quad f \text{ ist an der Stelle } x = 2 \text{ nicht definiert.}$$



1.2 Geben Sie jeweils die Gleichung einer Funktion mit der folgenden Eigenschaft an.

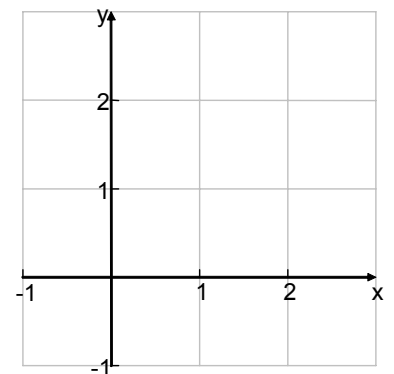
- Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion ohne Nullstellen.

- Die Funktion g besitzt für $x \rightarrow +\infty$ den Grenzwert null.

- Die Funktion h besitzt die Ableitungsfunktion $h'(x) = 3x^4 + 6x^3 - 3x + 7$.

- 1.3 Die Funktion f mit dem Graph G hat die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 10$; $x \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Anstieg von G im Punkt $P(2 | f(2))$.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G im Punkt P .
Geben Sie die Gleichung der waagerechten Tangente an G an.

- 1.4 Das Quadrat $ABCD$ mit $A(0 | 0)$, $B(2 | 0)$, $C(2 | 2)$ und $D(0 | 2)$ wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ in zwei Teile zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.



2 Analytische Geometrie

2.1 Geben Sie jeweils die Koordinaten von Punkten in einem kartesischen Koordinatensystem an.

- zwei Punkte in der yz - Ebene;
- ein Punkt der z - Achse;
- ein Punkt, der von der xz - Ebene den Abstand 2 LE hat.

2.2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie jeweils einen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ an, der

- parallel zu \vec{x} ist,
- senkrecht zu \vec{x} ist,
- den gleichen Betrag wie \vec{x} hat.

2.3 Gegeben sind die drei Punkte $A(-1 | 3 | 4)$, $B(2 | 4 | 6)$ und $C(3 | -2 | 6)$.
Begründen Sie, dass diese Punkte nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

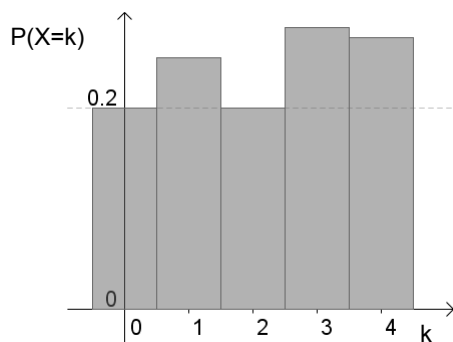
3 Stochastik

3.1 Eine ideale Münze wird dreimal geworfen. Dabei wird jeweils die sichtbare Seite (Wappen oder Zahl) notiert.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal dieselbe Seite erscheint.

Formulieren Sie für dieses Zufallsexperiment ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit 0,5 ist.

3.2 Begründen Sie, dass es sich nicht um die grafische Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.



Hinweise für Schüler

- Aufgabenwahl:** Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B. Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten. Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen. Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter erhöhten Anforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B. Von den Aufgaben B1, B2 und B3 ist **eine** auszuwählen.
- Bearbeitungszeit:** Allen Prüfungsteilnehmern steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung. Den Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter erhöhten Anforderungen ablegen, stehen zusätzlich 60 Minuten Bearbeitungszeit zur Verfügung.
- Hilfsmittel:** Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:
- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
 - der an der Schule zugelassene Taschenrechner und das zugelassene CAS,
 - Zeichengeräte
 - ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.
- Hinweis:** Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein. Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfangs beinhaltet.
- Sonstiges:** Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei
- guter Notation und Darstellung,
 - eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
 - vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.
- Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

A1 Analysis

- 1 Der Verlauf des Gleises einer Straßenbahn wird in einem Koordinatensystem durch Teile der Graphen F und G der Funktionen f bzw. g beschrieben.
Für die Funktionen gilt:
 $f(x) = 7,75 \cdot 10^{-6} x^3 - 0,00465 x^2 + 1,17 x + 120$ und
 $g(x) = 0,24 x + 182$.
- 1.1 Fertigen Sie eine geeignete Wertetabelle mit mindestens fünf Wertepaaren für die Funktion f an mit $0 \leq x \leq 200$ und zeichnen Sie den Graph von F in diesem Intervall.
Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graph G für $200 \leq x \leq 350$.
- 1.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass G die Tangente an F an der Stelle $x = 200$ ist.
- 1.3 Der Verlauf eines neu zu errichtenden Gleises wird durch einen Teil des Graphen H einer ganzrationalen Funktion h vierten Grades beschrieben. Das Gleis zweigt im Punkt A(200 | f(200)) von der vorhandenen Strecke ab und verläuft durch den Punkt B(150 | 165) zunächst bis zum Punkt C(100 | 0).
- 1.3.1 Weiterhin gilt: $h'(200) = f'(200)$ und $h''(200) = f''(200)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion h.
- 1.3.2 In einer vereinfachten Modellierung wird eine ganzrationale Funktion q zweiten Grades betrachtet, die nur die Bedingung erfüllt, dass ihr Graph Q durch die Punkte A, B und C verläuft.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion q.
(zur Kontrolle: $q(x) = -0,02x^2 + 8,3x - 630$)
- Tragen Sie die Punkte A, B und C sowie den Graph Q in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.1 ein.
- Bestimmen Sie mithilfe der Funktion q die Länge des Gleisneubaus.
- Überprüfen Sie die Bedingung $f'(200) = q'(200)$ und ziehen Sie hieraus eine Schlussfolgerung über die Brauchbarkeit der vereinfachten Modellierung.
- Im Zuge der Baumaßnahmen soll die Fläche W umgestaltet werden. Diese Fläche W wird von den Koordinatenachsen und den Graphen der Funktionen f und q vollständig begrenzt.
Berechnen Sie die Größe der Fläche W.

A 2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind $A(3 \mid 1 \mid -1)$, $B(3 \mid 7 \mid -4)$, $C(1 \mid 3 \mid 0)$, $D(x_D \mid y_D \mid z_D)$, $E(17 \mid 16 \mid 9)$ und $F(15 \mid 12 \mid 13)$ die Eckpunkte eines Prismas K mit der Grundfläche ABC .

- 2.1 Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
Der Punkt $P(3 \mid 2,2 \mid -1,6)$ liegt auf der Geraden durch die Punkte A und B .
Zeigen Sie, dass der Punkt P der Fußpunkt der von C ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC ist.
- 2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D .
Zeichnen Sie den Körper K .
Untersuchen Sie, ob dieses Prisma gerade ist.
Ermitteln Sie das Volumen des Prismas K .
- 2.3 Die Gerade g verläuft durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Kante \overline{EF} ,
während die Gerade h durch die Gleichung $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$
gegeben ist.
Prüfen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden.
Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes und die Größe des Schnittwinkels an.
- 2.4 Das Prisma K soll durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile gleichen Volumens zerlegt werden.
Beschreiben Sie den Verlauf einer möglichen Schnittebene durch die Angabe von 3 Punkten. Begründen Sie ihre Entscheidung.
- 2.5 Das Dreieck ABC ist Grundfläche für ein gerades Prisma, das das gleiche Volumen besitzt wie der Körper K .
Ermitteln Sie für ein solches Prisma die Koordinaten eines Eckpunktes der Deckfläche.

A3 Analysis und Stochastik

3 Gegeben ist eine Funktionenschar mit fünf Funktionen durch die Gleichung

$$f_c(x) = -x^2 - 2x + c \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Ihre Graphen heißen F_c .

3.1 Geben Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten der Hochpunkte der Graphen F_c in Abhängigkeit von c an.

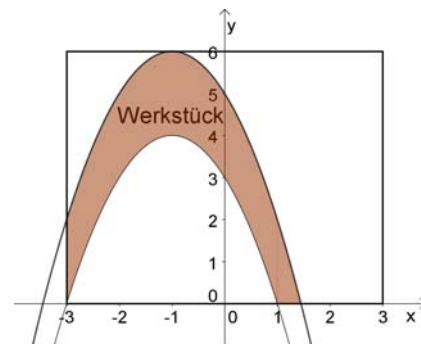
Skizzieren Sie die Graphen F_c in ein geeignetes Koordinatensystem, wobei die Verwendung der oben ermittelten Punkte ausreichend ist.

3.2 Zeigen Sie, dass der Inhalt der Flächen, den die Graphen F_c jeweils mit der x -Achse vollständig einschließen, mit der Gleichung $A(c) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{(c+1)^3}$

berechnet werden kann.

Stellen Sie die Folge der Flächeninhalte $A(c)$ grafisch dar.

3.3 Aus einem quadratischen Blech mit 6 cm Kantenlänge wird ein Teil ausgestanzt (siehe Abbildung).
Legt man ein Koordinatensystem mit seinen Achsen parallel zu den Seiten des Bleches und seinen Ursprung in die Mitte der unteren Kante, so können die Stanzkanten durch Teile von je zwei verschiedenen Graphen F_c beschrieben werden (x in cm).



Berechnen Sie den Flächeninhalt des Werkstücks für F_5 und F_3 .

Ermitteln Sie die Anzahl der verschiedenen herstellbaren Werkstücke.

3.4 Der an dieser Maschine arbeitende Kollege ist angehalten, die Qualität der von ihm gestanzten Bleche zu prüfen. Bei diesem Produktionsvorgang darf der Anteil fehlerhafter Teile maximal bei 4 % liegen. Dazu werden durch den Kollegen aus einer Tagesproduktion rein zufällig 6 Bleche ausgewählt und überprüft.

Die Zufallsvariable X beschreibt hierbei die Anzahl der fehlerhaften Teile.

Beschreiben Sie, unter welchen Bedingungen X als binomialverteilt angenommen werden kann.

X wird als binomialverteilt mit $p = 0,04$ angenommen.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Das folgende Entscheidungskriterium zur Qualitätskontrolle wird benutzt:
„Nur wenn sich kein fehlerhaftes Blech unter den 6 überprüften Teilen befindet, gibt es keinen Einwand bezüglich der Qualität der gestanzten Bleche.“

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tagesproduktion fälschlicherweise als mangelhaft eingestuft wird.

B1 Analysis

- 1.1 Der Luftdruck in der Erdatmosphäre verändert sich mit zunehmender Höhe. Für die sogenannte Normalatmosphäre wurden die in der Tabelle dargestellten Messwerte ermittelt. Dabei bedeutet h die Maßzahl der Höhe über der Erdoberfläche in km und p die Maßzahl des Luftdrucks in Hektopascal (hPa).

h	0	0,5	1,0	3,0	5,0	8,0	10,0
p	1013	955	899	701	540	356	264

- 1.1.1 Stellen Sie die Wertepaare dieser Tabelle in einem Koordinatensystem grafisch dar.

Der Zusammenhang zwischen p und h kann durch Funktionen näherungsweise beschrieben werden.

Ermitteln Sie durch folgende Regressionen die Gleichungen solcher Näherungsfunktionen.

$p = f_1(h)$... quadratische Regressionsfunktion

$p = f_2(h)$... Regressionsfunktion dritten Grades

$p = f_3(h)$... exponentielle Regressionsfunktion

Beurteilen Sie die Brauchbarkeit der ermittelten Funktionen hinsichtlich der Darstellung der Messwerte als auch der weiteren Veränderung des Luftdrucks mit zunehmender Höhe.

- 1.1.2 Die Abnahme des Luftdrucks mit wachsender Höhe lässt sich auch durch folgende Funktion beschreiben:

$$p = f(h) = 1013 \cdot \left(\frac{87}{100}\right)^h \quad \text{mit } h \geq 0, h \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie hiermit den Luftdruck auf dem Gipfel des Mount Everest (8848 m) und in 20 km Höhe.

Ermitteln Sie die Höhe, in welcher der Luftdruck etwa 800 hPa beträgt.

- 1.2 Die Funktion f ist gegeben mit der Gleichung

$$f(x) = 1013 \cdot \left(\frac{87}{100}\right)^x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, x \geq 0.$$

- 1.2.1 Untersuchen Sie f hinsichtlich Monotonie und Verhalten im Unendlichen. Überprüfen Sie, ob der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im ersten Quadranten für unbegrenzt wachsendes x beliebig groß werden kann.

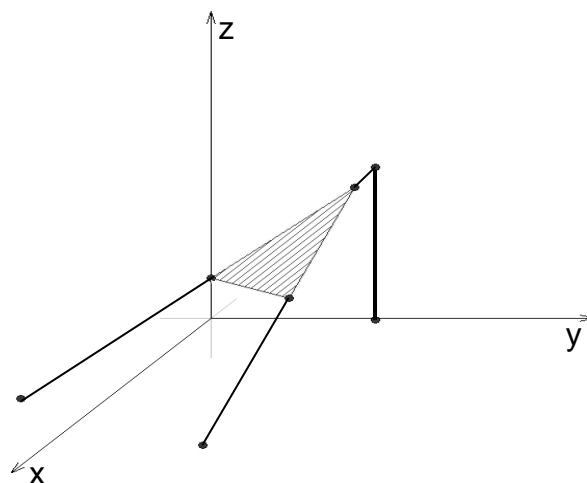
- 1.2.2 Eine Gerade g durch den Ursprung schließt mit dem Graphen von f und der y -Achse im ersten Quadranten eine Fläche von $\frac{-1013}{2 \cdot \ln\left(\frac{87}{100}\right)}$ FE ein.

Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung von g .

B2 Analytische Geometrie

- 2 Ein Sonnensegel zur Erzeugung eines Schattenbereiches hat die Form eines Dreiecks und in einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem die Eckpunkten $A(2 \mid 1 \mid 2)$, $B(3 \mid 3 \mid 2)$ und $C(0,5 \mid 3 \mid 3,5)$, wobei $1 \text{ LE} = 1 \text{ m}$ ist.

Das Segel ist durch drei geradlinig verlaufende Seile befestigt. Das erste Seil verläuft vom Punkt A in Richtung des Vektors \overline{CA} bis zum Punkt A_0 der xy -Ebene, das zweite vom Punkt B zum Punkt $B_0\left(\frac{19}{3} \mid 3 \mid 0\right)$ und das dritte



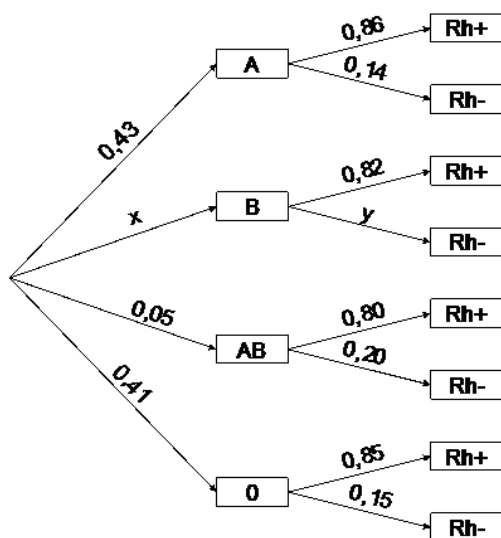
Seil vom Punkt C zum Punkt C_0 . Dieser befindet sich an der Spitze einer $3,8 \text{ m}$ langen geraden Stange St , die im Punkt $P(0,1 \mid 3,2 \mid 0)$ senkrecht zur xy -Ebene aufgestellt ist.

- 2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Befestigungspunkte A_0 und C_0 .
- 2.2 Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene mit den Punkten A, B und C an und bestimmen Sie den Neigungswinkel dieser Ebene gegenüber der xy -Ebene.
- 2.3 Parallel einfallende Sonnenstrahlen ergeben den in der xy -Ebene liegenden Schattenbereich $A'B'C'$ des Segels. Der Schattenpunkt von A ist zu einem bestimmten Zeitpunkt $A'(1,5 \mid 1,5 \mid 0)$.
- 2.3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schattenpunkte B' und C' zu diesem Zeitpunkt.
- 2.3.2 Weisen Sie durch Berechnung nach, dass der Punkt P zu diesem Zeitpunkt nicht im Schattenbereich des Segels in der xy -Ebene liegt.
- 2.3.3 Das Segel ist mit einem farbigen Kreis verziert, der die Seiten \overline{AC} und \overline{BC} berührt. Der Mittelpunkt ist $M\left(\frac{7}{6} \mid \frac{8}{3} \mid 3\right)$.
Ermitteln Sie die Größe der Kreisfläche.

B3 Stochastik

Abhängig von der Zusammensetzung der Eiweiße des Blutes unterscheidet man beim Menschen 4 Blutgruppen; A, B, AB und O. Zusätzlich ist es noch wichtig, das Vorhandensein des sogenannten Rhesusfaktors zu kennen. Daraus ergeben sich verschiedene Kombinationen. Dabei bedeutet z. B. die Angabe A+ die Blutgruppe A mit Rhesusfaktor positiv.

Die Kenntnis der Blutgruppe ist bei einer Transfusion von größter Wichtigkeit, da Blut unterschiedlicher Blutgruppen gegebenenfalls verklumpt. Vor der Entdeckung der Blutgruppen waren Blutübertragungen nur zufällig erfolgreich und endeten oft tödlich. Für die gesamte Aufgabe gilt: Ein Spender kann einem Empfänger Blut spenden, bedeutet, die Spende ist für den Empfänger verträglich. Alle weiteren Angaben entnehmen Sie den nachfolgenden Grafiken.



		Spender							
		0-	0+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
Empfänger	AB+	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
	AB-	☺	☹	☺	☹	☺	☹	☺	☹
	A+	☺	☺	☹	☹	☺	☺	☹	☹
	A-	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹
	B+	☺	☺	☺	☺	☹	☹	☹	☹
	B-	☺	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☹
	0+	☺	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹
	0-	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹

Tabelle 1: Verträglichkeit der Blutgruppen
☺ bedeutet, dass eine Blutübertragung möglich ist

Abbildung 1: Blutgruppenverteilung in Deutschland

3.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für x und y aus der Abbildung 1.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- A: Eine zufällig ausgewählte Person hat die Blutgruppe A+.
- B: Eine zufällig ausgewählte Person hat den Rhesusfaktor (Rh+).
- C: Eine zufällig ausgewählte Person kann von jedermann eine verträgliche Bluttransfusion erhalten.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit der Blutgruppe A+ von einer zufällig ausgewählten Person eine Blutspende erhalten kann.

Die Aufgabe wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

3.3 In Deutschland tritt die Blutgruppe AB- mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 auf. 1000 zufällig ausgewählte Personen werden getestet, ob sie diese Blutgruppe besitzen.

3.3.1 Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden darf.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Genau 10 Personen besitzen die Blutgruppe AB-.

B: Mehr als 20 Personen besitzen diese Blutgruppe.

3.3.2 Der Blutspendedienst des DRK hat bei einer Spendenaktion festgestellt, dass von insgesamt 2010 Blutspenden 25 Spenden der Blutgruppe AB- sind.

Weisen Sie nach, dass man deshalb mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % nicht davon ausgehen darf, dass der Anteil von Spendern mit der Blutgruppe AB- ungewöhnlich hoch ist.

Berechnen Sie, wie viele Blutspenden der Blutgruppe AB- mindestens unter diesen 2010 Spenden sein müssten, damit man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % davon ausgehen darf, dass der Anteil von Spendern mit der Blutgruppe AB- ungewöhnlich hoch ist.